Cuprins

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii este adevărată:

A. $-\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; B. $-\sqrt{25} \in \mathbb{Z}$; C. $-\sqrt{25} \notin \mathbb{Q}$; D. $-\sqrt{25} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) **2.** Opusul numărului raţional $\frac{8}{5}$ este numărul raţional:

A. $-\frac{8}{5}$; B. $\frac{5}{8}$; C. $\frac{8}{5}$; D. $-\frac{5}{8}$.

(0,5p) **3.** Media aritmetică a numerelor naturale 3 şi 6 este egală cu:

A. 5; B. 2,5; C. 4,5; D. 7.

(0,5p) **4.** Soluţia ecuaţiei $x^2 = 8$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A. $\{-2, 4\}$; B. $\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$; C. $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$; D. $\{-4, 2\}$.

(0,5p) **5.** Dintre numerele raţionale pozitive 0,(32), 0,33, 0,3(2) şi 0,32, cel mai mare este:

A. 0,3(2); B. 0,32; C. 0,33; D. 0,(32).

(0,5p) **6.** Rezultatul calculului $(2\sqrt{5}):\sqrt{10}-\sqrt{2}$ este egal cu:

A. 0; B. $\sqrt{2}$; C. $\sqrt{5}$; D. 3.

(0,5p) **7.** În triunghiul ABC notăm cu M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Dacă $MN = 7$ cm, atunci BC este egală cu:

A. 21 cm; B. 3,5 cm; C. 5,5 cm; D. 14 cm.

(0,5p) **8.** Într-o urnă sunt 6 bile albe şi 9 bile negre. Extrăgând o bilă, probabilitatea ca aceasta să fie albă este egală cu:

A. $\frac{1}{6}$; B. $\frac{2}{5}$; C. $\frac{3}{4}$; D. $\frac{1}{9}$.

(0,5p) **9.** Distanţa dintre punctele $A(3; 0)$ şi $B(1; 2\sqrt{3})$ exprimată în centimetri este:

A. $\sqrt{2}$ cm; B. 6 cm; C. 4 cm; D. $\sqrt{3}$ cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x-y=10 \end{cases}$, unde x şi y sunt numere reale.

2. Se consideră numărul real $x = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) : 2,(6) - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(0,7p) a) Arătaţi că $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. *(0,8p)* b) Calculaţi $m_a(x; x^{-1})$.

ALGEBRĂ

Capitolul I

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor

Citesc și rețin

În clasa a VI-a, la capitolul „Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale" am învățat că o mulțime poate fi definită printr-o proprietate a elementelor acesteia.

Exemplu: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 5\}$. Citim „Mulțimea A este formată din numerele naturale nenule n cu proprietatea $n < 5$".

Cum se aplică?

1. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 35 \vdots x\}$ și precizați cardinalul acesteia.

Soluție:

Divizorii întregi ai lui 35 sunt $\pm1, \pm5, \pm7, \pm35$, prin urmare $A = \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$ și card $A = 8$.

2. Scrieți mulțimea $P = \{2, 3, 5, 7\}$, folosind o proprietate a elementelor acesteia.

Soluție:

Observăm că elementele mulțimii P sunt numerele naturale prime de o cifră, prin urmare mulțimea P se scrie $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ este număr prim de o cifră$\}$.

3. Se consideră mulțimile $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < 5^2\}$ și $F = \{a \mid \overline{6a2} \vdots 3\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Soluție:

Mai întâi enumerăm elementele mulțimilor E și F. Elementele mulțimii E îndeplinesc condiția $2^n < 5^2$ sau $2^n < 25$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Elementele mulțimii F îndeplinesc condiția $\overline{6a2} \vdots 3$, deci $3 \mid 6 + a + 2$ sau $3 \mid 8 + a$, de unde rezultă că $F = \{1, 4, 7\}$; a) $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$; b) $E \cap F = \{1, 4\}$; c) $E \setminus F = \{0, 2, 3\}$; d) $F \setminus E = \{7\}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \le 4\} =$ ....; b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 7\} =$ ....;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \le n < 3\} =$ ....; d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \le n \le 5\} =$ ....

2. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „geometria”$\} =$ ....;

b) $B = \{y \mid y$ este cifră a numărului „701233048”$\} =$ ....

3. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 2\} =$ ....;

b) $F = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 4\} =$ ....

4. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{n}{5} \text{ este fracţie subunitară} \right\} =$ .... ;

b) $B = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \frac{5}{n} \text{ este fracţie supraunitară} \right\} =$ ....

5. Se consideră mulţimile $E = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „tetraedru”$\}$ şi $F = \{y \mid y$ este literă a cuvântului „cilindru”$\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Efectuaţi $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ şi $D \setminus C$ în următoarele cazuri:

a) $C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \le 5\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 3\}$;

b) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z}^* \mid |m| \le 3\}$.

7. Ştiind că $\mathcal{D}_n$ este mulţimea divizorilor naturali ai lui n, efectuaţi:

a) $\mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_9$; b) $\mathcal{D}_6 \cap \mathcal{D}_9$; c) $\mathcal{D}_6 \setminus \mathcal{D}_9$; d) $\mathcal{D}_9 \setminus \mathcal{D}_6$.

8. Se consideră mulţimile $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \le m < 4\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 3\}$. Efectuaţi:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$; e) $A \times B$; f) $B \times A$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

26. Determinaţi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$ în următoarele cazuri:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |4 - x| < 5\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{3x+8}{4x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |1 - 2x| < 7\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{1-4x}{2x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

27. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| - |x - 1| + |x + 1| \leq 1\}$. Câte submulţimi are mulţimea $A \cap \mathbb{Z}$?

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Efectuaţi $A \cup B$ şi $A \cap B$ în următoarele cazuri:
a) $A = (-1; +\infty)$ şi $B = [3; +\infty)$; b) $A = [-67; 23)$ şi $B = (-71; 19]$.

(3p) **2.** Se consideră intervalele de numere reale $E = \left(-\sqrt{5}; \sqrt{6}\right)$, $F = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{7}\right]$ şi mulţimile $G = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x \in E \cup F\}$, $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in E \cap F\}$. Efectuaţi:
a) $G \cup H$; b) $G \cap H$; c) $G \setminus H$; d) $H \setminus G$.

(3p) **3.** Scrieţi mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$ sub formă de intervale de numere reale şi efectuaţi: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$.

Lecţia 4. Inecuaţii de forma $ax + b > 0$ ($\geq, <, \leq$), $x, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Citesc şi reţin

Definiţie: O propoziţie cu o variabilă de forma $ax + b > 0$ ($\geq, <, \leq$), $x, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (1) se numeşte **inecuaţie de gradul I cu o necunoscută**.

Definiţie: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numeşte **soluţie a inecuaţiei** (1) dacă $au + b > 0$ (u verifică inecuaţia).

A rezolva inecuaţia (1) înseamnă a determina mulţimea de soluţii:

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b > 0\}.$$

Definiţie: Două inecuaţii de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi următoarele inecuaţii, unde $x \in \mathbb{R}$:

a) $10x + 3 < -11$; b) $-2\sqrt{6}x \geq 4\sqrt{3}$.

Soluţie:

a) $10x + 3 < -11 \Leftrightarrow 10x < -14 \Leftrightarrow x < \frac{-14^{(2}}{10} \Leftrightarrow x < -\frac{7}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{5}\right)$;

b) $-2\sqrt{6} \geq 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{4\sqrt{3}}{-2\sqrt{6}} \Leftrightarrow x \leq -\frac{{}^{\sqrt{2})}2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \leq -\frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţiile:

a) $5(2x - 3) \geq 7x$; b) $0,8 - 0,(6)x > 2$.

Soluţie:

a) $5(2x - 3) \geq 7x \Leftrightarrow 10x - 15 \geq 7x \Leftrightarrow 10x - 7x \geq 15 \Leftrightarrow 3x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq \frac{15}{3} \Leftrightarrow x \geq 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in [5; +\infty)$;

b) $0,8 - 0,(6)x > 2 \Leftrightarrow -0,(6)x > 2 - 0,8 \Leftrightarrow -0,(6)x > 1,2 \Leftrightarrow -\frac{6^{(3}}{9}x > \frac{12^{(2}}{10} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x > \frac{6}{5} \Leftrightarrow x < \frac{6}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x < -\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{9}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{5}\right)$.

3. Determinaţi cel mai mic număr întreg care verifică inecuaţia:

$$9\left(x + \sqrt{7}\right) < 2\sqrt{7}\left(\sqrt{7}x - 3\right).$$

Soluţie:

$9\left(x + \sqrt{7}\right) < 2\sqrt{7}\left(\sqrt{7}x - 3\right) \Leftrightarrow 9x + 9\sqrt{7} < 14x - 6\sqrt{7} \Leftrightarrow 9x - 14x < -6\sqrt{7} -$
$- 9\sqrt{7} \Leftrightarrow -5x < -15\sqrt{7} \Leftrightarrow x > \left(-15\sqrt{7}\right) : (-5) \Leftrightarrow x > 3\sqrt{7} \Leftrightarrow x \in \left(3\sqrt{7}; +\infty\right)$;
$x > 3\sqrt{7}$ sau $x > \sqrt{63}$ şi $x \in \mathbb{Z}$, deci $x = \sqrt{64} = 8$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Stabiliţi dacă numărul real 1 verifică inecuaţia:

a) $13x < 14$; b) $5x - 1 \leq 4$; c) $0,5x \geq 0,25$;

d) $27 - 13x > 14$; e) $7\left(1 - \frac{x+1}{2}\right) \leq 0$; f) $17 - 2\sqrt{3}x \geq 13$.

b)

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecţia 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Citesc şi reţin

Numere reale reprezentate prin litere

Spunem despre o expresie de forma ax^n, unde $a, x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, că este un număr real **reprezentat prin litere**.

Numărul real a se numeşte **coeficient**, iar x^n se numeşte **parte literală**. Partea literală este formată din una sau mai multe litere care înlocuiesc numere reale neprecizate.

Exemple: $\frac{1}{2}x^5; -3x^2; 4\sqrt{5}xy^3; \frac{7}{\sqrt{3}}a^2bc^7$.

Definiţie: Un ansamblu de numere reale reprezentate prin litere legate între ele prin operaţii aritmetice (adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere) se numeşte **expresie algebrică**.

Exemplu: $E(x) = (x^3 + 2x^3)^2 : (9x^4) - 5x$.

Definiţie: Două sau mai multe numere reale reprezentate prin litere se numesc **termeni asemenea** dacă părţile lor literale sunt identice.

Exemple: $-4x^3$ şi $\sqrt{6}x^3$; $2,(3)x^4y^3$ şi $-\frac{1}{\sqrt{2}}x^4y^3$.

Definiţie: O sumă de numere reale în care cel puţin un termen este număr real reprezentat prin litere se numeşte **sumă algebrică**.

Definiţie: O sumă algebrică este scrisă sub **formă canonică** dacă nu conţine termeni asemenea.

Exemplu: $x^2 - \sqrt{2}x + 3$.

Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Prin adunare şi scădere, termenii asemenea se reduc. De aceea, operaţiile de adunare şi scădere a numerelor reale reprezentate prin litere se numesc operaţii de reducere a termenilor asemenea.

Reguli de calcul

- $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $ax^n - bx^n = (a-b)x^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $a_1x^n + a_2x^n + a_3x^n + \ldots + a_mx^n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)x^n$, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \in$ $\in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Cum se aplică?

1. Reduceţi termenii asemenea:

a) $4x + 3x$; b) $5x^2 - 2x^2$.

Soluţie:

a) $4x + 3x = x(4+3) = 7x$; b) $5x^2 - 2x^2 = x^2(5-2) = 3x^2$.

2. Reduceţi termenii asemenea:

a) $31x - 29 - 27x + 16$; b) $4x^3 - x - x^3 + 7x - 4x^3$.

Soluţie:

a) $31x - 29 - 27x + 16 = x(31 - 27) - 29 + 16 = 4x - 13$;

b) $4x^3 - x - x^3 + 7x - 4x^3 = x^3(4 - 1 - 4) + x(-1 + 7) = -x^3 + 6x$.

3. Reduceţi termenii asemenea:

a) $\frac{1}{4}a^3 - \frac{2}{5}a^2 + \frac{7}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{3}{2\sqrt{2}}a - \frac{8}{\sqrt{3}}a^2$.

Soluţie:

a) $\frac{1}{4}a^3 - \frac{2}{5}a^2 + \frac{7}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2 = a^3\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) + a^2\left(-\frac{^{2)}2}{5} + \frac{^{5)}3}{2}\right) = \frac{8}{4}a^3 + a^2\left(-\frac{4}{10} + \frac{15}{10}\right) =$

$= 2a^3 + \frac{11}{10}a^2$;

b) $\frac{^{\sqrt{3})}2}{\sqrt{3}}a^2 - \frac{^{\sqrt{2})}1}{\sqrt{2}}a + \frac{^{\sqrt{2})}3}{2\sqrt{2}}a - \frac{^{\sqrt{3})}8}{\sqrt{3}}a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{3\sqrt{2}}{4}a - \frac{8\sqrt{3}}{3}a^2 =$

$= a^2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) + a\left(-\frac{^{2)}\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{6\sqrt{3}}{3}a^2 + a\left(-\frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = -2\sqrt{3}a^2 +$

$+ \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Pentru următoarele numere reale reprezentate prin litere numiţi coeficienţii şi părţile lor literale:

a) $38x^5$; b) $-\frac{7}{8}y^3$; c) $\frac{11}{15}t^4$; d) $-\sqrt{6}x^8$;

e) $-\frac{7}{5}xy^3$; f) $-11a^2b^3$; g) $3\sqrt{2}z^5t^2$; h) $\frac{27}{31}z^4t$.

2. Completaţi spaţiile punctate cu forma canonică a următoarelor sume algebrice:

a) $29 + 3x^2 - 8x =$ ....; b) $35x - 7 - 4x^2 =$ ....;

c) $4y + 2y^4 - 21 - \sqrt{2}\,y^3 =$ ....;

d) $-y^2 + \sqrt{5}\,y^3 - 16 - 9y^5 =$ ....

Lecţia 8. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere

Citesc şi reţin

Pentru **ridicarea la putere** cu exponent natural a unui număr real nenul reprezentat prin litere se utilizează următoarele reguli de calcul cu puteri.

Reguli de calcul

- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$, $m, n \in \mathbb{N}$;
- $(ax^m)^n = a^n x^{m \cdot n}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Cum se aplică?

1. Efectuaţi:

a) $(5x^2)^2$; b) $(-3x^5)^3$; c) $(-2x^3)^4$.

Soluţie:

a) $(5x^2)^2 = 5^2x^{2 \cdot 2} = 25x^4$; b) $(-3x^5)^3 = (-3)^3x^{5 \cdot 3} = -27x^{15}$;

c) $(-2x^3)^4 = (-2)^4x^{3 \cdot 4} = +2^4x^{12} = 16x^{12}$.

2. Efectuaţi ridicările la putere şi reduceţi termenii asemenea:

a) $(-5x^6)^2 + (-3x^4)^3$; b) $\left(-\sqrt{7}x^3\right)^5 - \left(2\sqrt{7}x^5\right)^3$.

Soluţie:

a) $(-5x^6)^2 + (-3x^4)^3 = +5^2x^{6 \cdot 2} + (-3^3x^{4 \cdot 3}) = 25x^{12} + (-27x^{12}) = -2x^{12}$;

b) $\left(-\sqrt{7}x^3\right)^5 - \left(2\sqrt{7}x^5\right)^3 = -\sqrt{7}^5 x^{3 \cdot 5} - \left[+\left(2\sqrt{7}\right)^3 x^{5 \cdot 3}\right] = -49\sqrt{7}x^{15} - 56\sqrt{7}x^{15} =$

$= -105\sqrt{7}x^{15}$.

3. Se consideră expresia algebrică $E(x) = (2x^3 + 5)(5 - 2x^3) - 25$. Calculaţi $[E(x)]^3$.

Soluţie:

$E(x) = (2x^3 + 5)(5 - 2x^3) - 25 = 10x^3 - 4x^6 + 25 - 10x^3 - 25 = -4x^6$, de unde rezultă că $[E(x)]^3 = (-4x^6)^3 = -64x^{18}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Efectuaţi:

a) $(2x)^2 =$ ....; b) $(3x^2)^2 =$ ....; c) $(4x^3)^2 =$ ....;

d) $(-5x^4)^2 =$ ....; e) $(-3x^5)^2 =$ ....; f) $(-4x^3)^2 =$ ....

2. Efectuaţi:

a) $(4x^4)^3 =$ ....; b) $(5x^3)^3 =$ ....; c) $(3x^5)^3 =$ ....;

d) $(-4x^4)^3 =$ ....; e) $(-3x^2)^3 =$ ....; f) $(-2x^4)^3 =$ ....

15. Dacă x, y şi z sunt numere reale, verificaţi şi memoraţi următoarele formule de calcul:
a) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$;
b) $(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

16. Verificaţi şi memoraţi următoarele formule de calcul prescurtat, unde $x, y \in \mathbb{R}$:
a) $(x + y)^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$; b) $(x - y)^3 = x^3 - 3xy(x - y) - y^3$.

17. Arătaţi că $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Efectuaţi:
a) $(10x^7)^2$; b) $\left(-\frac{2}{3}x^5\right)^3$; c) $\left(-\sqrt{7}x\right)^4$.

(3p) **2.** Se consideră expresia algebrică $E(x) = (3x - 2x^2)(2x^3 + 3x^2) - 9x^3$. Calculaţi $[E(x)]^3$.

(3p) **3.** Arătaţi că $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(2p) **1.** Se consideră sumele algebrice $A(x) = x^2 + 6x$ şi $B(x) = 3x^2 - 7x + 4$. Calculaţi:
a) $A(x) + B(x)$; b) $B(x) - A(x)$.

(2p) **2.** Efectuaţi:
a) $2x^3(3x^2 + 8x)$; b) $(9x^4 - 6x) : (3x)$.

(1p) **3.** Arătaţi că media geometrică a numerelor $5\sqrt{2} - 1$ şi $5\sqrt{2} + 1$ este un număr natural.

(1p) **4.** Se consideră expresia următoare: $E(x) = (\sqrt{3}x^3)^4 - (\sqrt{11}x^6)^2 - (\sqrt{2}x^2)^6$. Calculaţi $E(x) : (-5x^7)$.

(1p) **5.** Arătaţi că expresia $F(x) = 4(2x^3 + 5) - (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ nu depinde de x, oricare ar fi numărul real x.

(2p) **6.** Arătaţi că $n = \sqrt{5}(19\sqrt{5} - \sqrt{10}) - (\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - \sqrt{6} + 1)$ este număr natural cub perfect.

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VIII-a
Capitolul: Calcul algebric în $\mathbb{R}$ (Lecţiile 5 – 8)
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Numerele reale reprezentate prin litere $\sqrt{2}x^3$ şi $\sqrt{3}x^2$ sunt termeni asemenea.
A F

(7p) **2.** Forma canonică a sumei algebrice $8 - x^3 + 7x$ este $-x^3 + 7x + 8$.
A F

(7p) **3.** Produsul numerelor reale reprezentate prin litere $\frac{3}{2}x$ şi $\frac{2}{3}x^4$ este egal cu x^5.
A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** După reducerea termenilor asemenea, suma algebrică $4x^3 + 2x^2 - x^3 + 7x^2$ se scrie ....

(7p) **2.** Câtul împărţirii $(10x^3 - 15x^2) : (5x^2)$ este egal cu ....

(7p) **3.** Efectuând înmulţirea $\sqrt{6}(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$ obţinem ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Se consideră sumele algebrice $S_1(y) = y^2 - 4y - 8$ şi $S_2(y) = 2y^3 + y^2 - 3y - 8$. Diferenţa $S_1(y) - S_2(y)$ este egală cu:
A. $-2y^3 + 4$; B. $-5y^2 + y$; C. $-2y^3 - y$; D. $y^3 - 4y^2$.

(8p) **2.** Forma canonică a expresiei $E(x) = (5x - 2)(x^2 - 5x - 2) - 4$ este:
A. $5x^3 - 27x^2$; B. $3x^2 + 8x$; C. $-x^2 + 7x$; D. $4x^3 + 12x^2$.

(8p) **3.** Rezultatul calculului $(x^2 - 2x^2 + 3x^2)^3 : (-2x)^2$ este egal cu:
A. $4x^2$; B. $-4x$; C. $-2x$; D. $2x^4$.

La exerciţiile IV. şi V. scrieţi pe fişă rezolvările complete.

IV. Se consideră numărul:
(8p)
$$n = 4(\sqrt{3} - \sqrt{7}) - \sqrt{21}(\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{21}) - (\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{21} - 10).$$

Arătaţi că $n \in \mathbb{N}$.

V. Se consideră expresia:

$$E(x) = (x^2 - x)(x^2 + 6x - 2) - (x - 3)(x^3 + 3x^2 + x - 1) - 6x,$$

unde $x \in \mathbb{R}$.

(8p) a) Arătaţi că $E(x) = 5x^3 - 3$, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$.

(8p) b) Arătaţi că, pentru orice număr natural n, $E(n)$ nu este pătrat perfect.

GEOMETRIE

Capitolul I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

Lecţia 1. Puncte, drepte, plane: convenţii de notare, reprezentări, determinarea dreptei

Citesc şi reţin

Elementele fundamentale ale geometriei în spaţiu sunt: **punctul**, **dreapta**, **planul**.

Punctul este descris ca fiind urma lăsată de vârful unui creion ascuţit pe o coală de hârtie. Punctul se notează cu una dintre literele mari ale alfabetului: A, B, C, ...

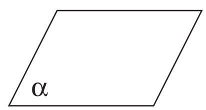
Dreapta este descrisă ca fiind un fir de aţă bine întins şi nesfârşit la ambele capete. Dreapta se notează cu una dintre literele mici ale alfabetului: a, b, c, ...

Planul este descris ca fiind suprafaţa unei ape liniştite. Planul se notează cu una dintre literele greceşti: α (alfa), β (beta), γ (gama), ...

În continuare vom reprezenta, vom nota şi vom citi un punct, o dreaptă şi un plan.

Punctul A

Dreapta d

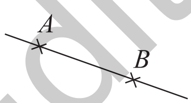


Planul α

Observaţie: Punctul, dreapta şi planul sunt mulţimi de puncte.

Considerăm adevărate, de la început, următoarele **propoziţii**:

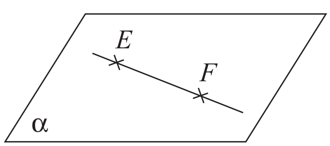
1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una (două puncte distincte determină o dreaptă).



Dreapta determinată de punctele A şi B se notează AB sau BA.

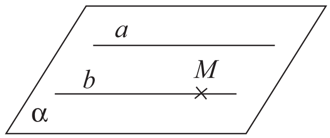
2. Dreapta d este inclusă în planul α dacă orice punct al dreptei d aparţine planului α. Notăm $d \subset \alpha$.

3. Dacă două puncte distincte ale dreptei d aparţin planului α, atunci dreapta d este inclusă în planul α.



$$\left.\begin{array}{l} E \in \alpha \\ F \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow EF \subset \alpha$$

4. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o paralelă şi numai una la dreapta respectivă.

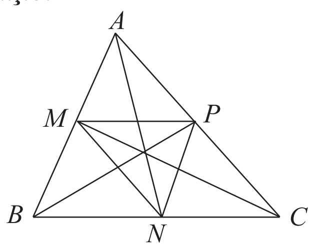


$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ M \in \alpha \\ b \parallel a \end{array}\right\} \Rightarrow b \subset \alpha$$

Cum se aplică?

1. Dacă punctele A, B şi C sunt vârfurile unui triunghi, iar M, N şi P sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CA, aflaţi numărul dreptelor determinate de cele şase puncte.

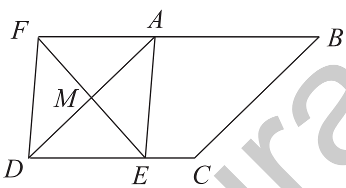
Soluţie:



Cele 6 puncte determină 9 drepte: AB, BC, CA, MN, NP, PM, AN, BP, CM.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctul E situat pe latura CD. Dacă notăm cu M mijlocul laturii AD şi cu F simetricul punctului E faţă de M, arătaţi că punctele F, A şi B sunt coliniare.

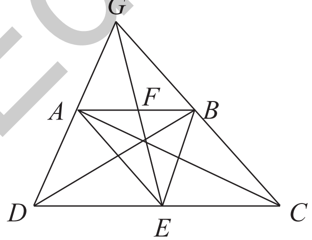
Soluţie:



Deoarece $AM \equiv MD$ şi $EM \equiv MF$, rezultă că patrulaterul $AEDF$ este paralelogram, deci $AF \parallel CD$, prin urmare dreptele AF şi AB sunt identice, de unde rezultă că punctele F, A şi B sunt coliniare.

3. În trapezul $ABCD$, notăm cu E şi F mijloacele bazelor CD, respectiv AB. Dacă $AD \cap BC = \{G\}$, precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D, E, F şi G.

Soluţie:

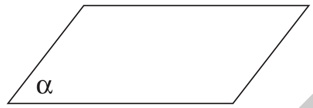


Arătăm că punctele G, F şi E sunt coliniare. Presupunem că $GF \cap CD = \{E_1\}$. Deoarece $AB \parallel CD$, aplicând teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\dfrac{GF}{GE_1} = \dfrac{AF}{DE_1}$ şi $\dfrac{GF}{GE_1} = \dfrac{BF}{CE_1}$, deci $\dfrac{AF}{DE_1} = \dfrac{BF}{CE_1}$, de unde deducem că $DE_1 \equiv CE_1$, prin urmare $E_1 = E$, deci punctele G, F şi E sunt coliniare. Punctele A, B, C, D, E, F şi G determină 11 drepte: AB, BC, CD, DA, AC, BD, EF, AE, BE, CF şi DF.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În planul α reprezentat în figura alăturată construiţi punctele distincte E şi F şi dreapta determinată de acestea.



2. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii: Dreapta determinată de punctele E şi F de la problema precedentă se notează:

a) EF; ☐ b) FE. ☐

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

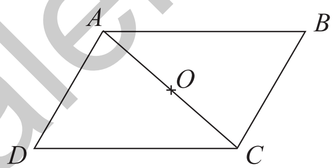
a) Printr-un punct trece o infinitate de drepte. ☐

b) Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. ☐

4. În paralelogramul $ABCD$ reprezentat în figura alăturată am notat cu O mijlocul diagonalei AC. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Dreptele BO şi DO sunt distincte. ☐

b) Dreptele BO şi DO sunt identice. ☐



5. În planul β reprezentat în figura alăturată desenaţi punctele distincte şi necoliniare A, B şi C şi dreptele determinate de acestea.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Desenaţi triunghiul DEF şi punctul G situat pe latura EF. Precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele D, E, F şi G.

7. Desenaţi triunghiul MNP şi punctul Q situat în interiorul acestuia. Precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele M, N, P şi Q.

8. Dacă punctele A, B şi C, respectiv B, C şi D sunt coliniare, arătaţi că A, B, C şi D sunt patru puncte coliniare.

9. Dacă punctele A, B, C şi D sunt vârfurile unui patrulater convex, stabiliţi numărul dreptelor determinate de acestea.

10. Se consideră triunghiul MNP şi punctele E şi F situate pe laturile MN, respectiv NP. Numiţi dreptele determinate de punctele M, N, P, E şi F.

11. În paralelogramul $ABCD$, notăm cu M mijlocul laturii CD şi cu N simetricul punctului A faţă de M. Stabiliţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D şi N.

12. Într-un plan se consideră cinci puncte, oricare trei dintre acestea fiind necoliniare. Stabiliţi numărul dreptelor determinate de cele cinci puncte.

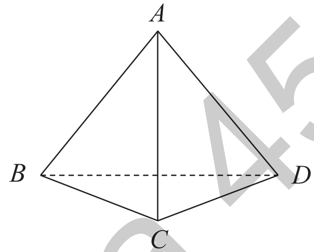
Lecţia 3. Tetraedrul şi piramida

Citesc şi reţin

Definiţie: Corpul geometric determinat de patru puncte necoplanare se numeşte **tetraedru**. Punctele A, B, C şi D se numesc **vârfurile** tetraedrului.

Segmentele AB, AC, AD, BC, CD şi DB se numesc **muchiile** tetraedrului.

Triunghiurile ABC, ACD, ADB şi BCD se numesc **feţele** tetraedrului.



Definiţie: Tetraedrul care are toate muchiile congruente se numeşte **tetraedru regulat**.

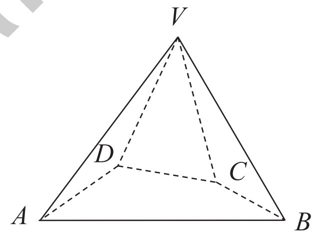
Definiţie: Corpul geometric determinat de vârfurile unui poligon convex, numit bază, şi de un punct nesituat în planul acestuia, numit vârf, se numeşte **piramidă**.

Observaţie: După numărul de laturi ale bazei, piramidele se numesc: triunghiulare, patrulatere, pentagonale, hexagonale etc.

Punctul V este **vârful** piramidei, iar patrulaterul $ABCD$ este **baza** piramidei patrulatere din figura alăturată.

Segmentele VA, VB, VC şi VD se numesc **muchiile laterale** ale piramidei.

Triunghiurile VAB, VBC, VCD şi VDA se numesc **feţele laterale** ale piramidei.



Definiţie: O piramidă care are baza **poligon regulat** şi muchiile laterale congruente se numeşte **piramidă regulată**.

În figura 1 este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$, iar în figura 2 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$.

Fig. 1

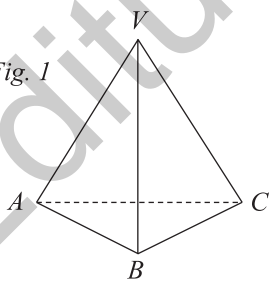
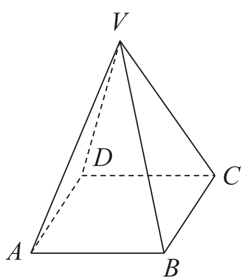
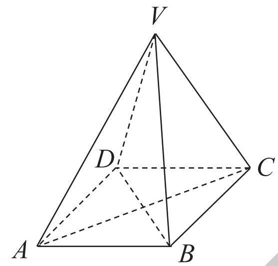


Fig. 2



Definiţie: Secţiunea diagonală a unei piramide patrulatere regulate este secţiunea realizată cu planul determinat de vârful piramidei şi o diagonală a bazei.

Triunghiurile isoscele şi congruente VAC şi VBD reprezintă secţiunile diagonale ale piramidei patrulatere regulate $VABCD$ din figura alăturată.



Desfăşurarea în plan a unei piramide

În figura 3 este reprezentată desfăşurarea în plan a suprafeţei unei piramide triunghiulare regulate $VABC$, iar în figura 4 este reprezentată desfăşurarea în plan a suprafeţei unei piramide patrulatere regulate $VABCD$.

Fig. 3

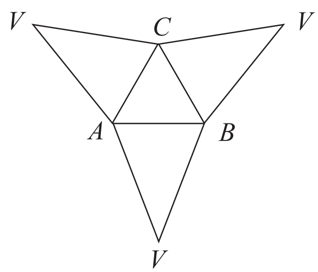
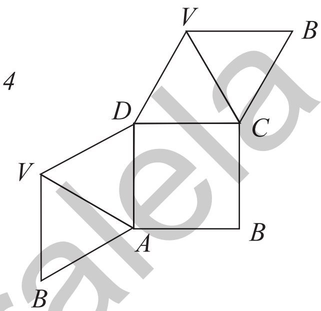


Fig. 4



Observaţie: Desfăşurarea în plan a suprafeţei unei piramide nu este unică.

Notaţii utilizate:

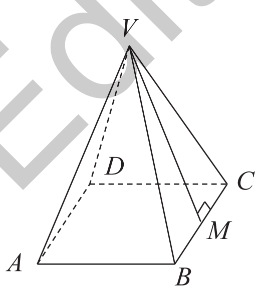
l – lungimea muchiei bazei, m – lungimea muchiei laterale, R – raza cercului circumscris bazei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{P}_f$ – perimetrul feţei laterale, $\mathcal{A}_f$ – aria feţei laterale, $\mathcal{P}_d$ – perimetrul secţiunii diagonale, $\mathcal{A}_d$ – aria secţiunii diagonale.

Cum se aplică?

1. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are aria bazei egală cu 64 cm^2 şi muchia laterală de 5 cm. Aflaţi:

a) l; b) $\mathcal{P}_b$; c) $\mathcal{P}_f$; d) $\mathcal{A}_f$.

Soluţie:



a) Deoarece $ABCD$ este pătrat, rezultă că $\mathcal{A}_b = l^2$, aşadar $l^2 = 64$ cm^2, deci $l = \sqrt{64}$ cm şi obţinem $l = 8$ cm;

b) $\mathcal{P}_b = 4l = 4 \cdot 8$ cm $= 32$ cm;

c) $\mathcal{P}_{VAB} = VA + AB + VB = 18$ cm;

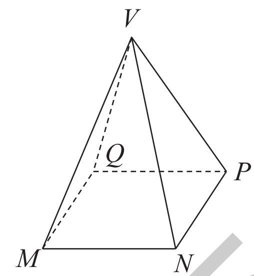
d) Construim $VM \perp BC$, $M \in BC$, deci $BM = CM = 4$ cm. În ΔVMC cu $\sphericalangle M = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $VC^2 = VM^2 + MC^2$, de unde obţinem $VM = 3$ cm.

$\mathcal{A}_f = \dfrac{BC \cdot VM}{2} = 12$ cm^2.

3. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată *VMNPQ* cu vârful în *V*. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.

A. Patrulaterul *MNPQ* este romb.

B. Patrulaterul *MNPQ* este pătrat.



4. În figura de la problema 3 este reprezentată piramida patrulateră regulată *VMNPQ* cu vârful în *V*. Completaţi tabelul:

Muchiile bazei	
Muchiile laterale	
Feţele laterale	

5. În figura de la problema 3 este reprezentată piramida patrulateră regulată *VMNPQ* cu vârful în *V*. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

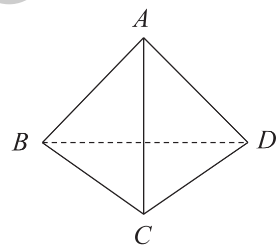
a) $MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QM$; ☐ b) $VM \equiv VN \equiv VP \equiv VQ$. ☐

6. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: „Dacă o piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei egală cu muchia laterală, atunci piramida este un tetraedru regulat.” ☐

7. În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat *ABCD*. Ştiind că suma lungimilor muchiilor tetraedrului este egală cu 12 cm, calculaţi:

a) $\mathcal{P}_{ABC}$ = ...;

b) $\mathcal{A}_{BCD}$ = ...



Exerciţii şi probleme de dificultate medie

8. Piramida triunghiulară regulată *VABC* cu vârful în *V* are muchia bazei de 6 cm şi muchia laterală de 5 cm. Aflaţi:

a) $\mathcal{P}_b$; b) $\mathcal{A}_b$; c) $\mathcal{P}_f$; d) $\mathcal{A}_f$.

9. Piramida patrulateră regulată *VABCD* cu vârful în *V* are muchia bazei de 10 cm şi muchia laterală de 13 cm. Aflaţi:

a) $\mathcal{P}_b$; b) $\mathcal{A}_b$; c) $\mathcal{P}_f$; d) $\mathcal{A}_f$.

10. Piramida triunghiulară regulată *VABC* cu vârful în *V* are perimetrul bazei egal cu 48 cm şi perimetrul unei feţe laterale egal cu 36 cm. Aflaţi:

a) l; b) m; c) $\mathcal{A}_b$; d) $\mathcal{A}_f$.

11. Piramida patrulateră regulată *VABCD* cu vârful în *V* are aria bazei egală cu 324 cm^2 şi perimetrul unei feţe laterale egal cu 48 cm. Aflaţi:

a) l; b) BD; c) m; d) $\mathcal{A}_f$.

12. Piramida triunghiulară regulată *VABC* cu vârful în *V* are aria bazei egală cu $4\sqrt{3}$ cm^2 şi aria unei feţe laterale egală cu 8 cm^2. Aflaţi:

a) l; b) $\mathcal{P}_b$; c) m; d) $\mathcal{P}_f$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

21. Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, în care notăm cu T mijlocul CC'. Dacă muchia bazei mici, muchia laterală şi muchia bazei mari au lungimile egale cu a, $2a$, respectiv $3a$, arătaţi că $\mathcal{P}_{AC'B} = \mathcal{P}_{ATB}$.

22. Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară $ABCA'B'C'$, care are muchiile laterale congruente. Dacă notăm cu D şi E proiecţiile punctelor A' şi B' pe muchiile bazei mari, AC, respectiv BC, arătaţi că $DE = \dfrac{AB + A'B'}{2}$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei mari de 8 cm, muchia bazei mici de 2 cm şi muchia laterală de 5 cm. Calculaţi:
a) $\mathcal{P}_B$; b) $\mathcal{A}_b$; c) a_t; d) $\mathcal{A}_l$.

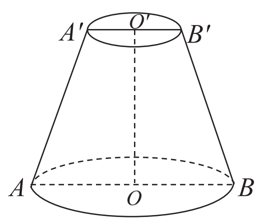
(3p) **2.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are muchia bazei mari de $8\sqrt{2}$ cm, muchia bazei mici de $4\sqrt{2}$ cm şi înălţimea de $2\sqrt{2}$ cm. Calculaţi:
a) $\mathcal{A}_d$; b) m; c) a_t.

(3p) **3.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $8\sqrt{3}$ cm, apotema de 6 cm şi înălţimea de $3\sqrt{3}$ cm. Notăm cu O centrul bazei mari. Calculaţi:
a) l; b) h; d) d$(O, A'A)$.

Lecţia 16. Trunchiul de con circular drept

Citesc şi reţin

Definiţie: Secţionând un con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei şi înlăturând conul mic care s-a format, se obţine un corp geometric numit **trunchi de con circular drept**.



Discurile mărginite de cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}(O', r)$ se numesc **baza mare**, respectiv **baza mică** a trunchiului de con circular drept.

Segmentele congruente $A'A$, $B'B$, ... se numesc **generatoarele** trunchiului de con circular drept.

Definiţie: Segmentul cu extremităţile în punctele de intersecţie dintre planele bazelor unui trunchi de con circular drept şi o perpendiculară comună a acestora se numeşte **înălţimea** trunchiului de con circular drept.

Observaţie: Segmentul determinat de centrele celor două baze ale unui trunchi de con circular drept este înălţimea acestuia.

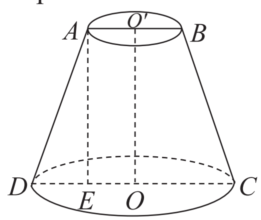
Segmentul $O'O$ este înălţimea trunchiului de con din figura de mai sus.

Definiţie: Secţiunea axială a unui trunchi de con circular drept este secţiunea realizată cu un plan care conţine înălţimea determinată de centrele celor două baze ale trunchiului de con.

Secţiunea axială a trunchiului de con din figura de mai sus este trapezul isoscel *A'ABB'*.

Notaţii utilizate:

R – raza bazei mari a trunchiului de con, r – raza bazei mici a trunchiului de con, g – lungimea generatoarei trunchiului de con, i – lungimea înălţimii trunchiului de con, G – lungimea generatoarei conului din care provine trunchiul de con, h – lungimea înălţimii conului din care provine trunchiul de con, $\mathscr{A}_B$ – aria bazei mari a trunchiului de con, $\mathscr{A}_b$ – aria bazei mici a trunchiului de con, $\mathscr{P}_a$ – perimetrul secţiunii axiale a trunchiului de con, $\mathscr{A}_a$ – aria secţiunii axiale a trunchiului de con, u – măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de disc obţinut prin desfăşurarea conului circular drept din care provine trunchiul de con.



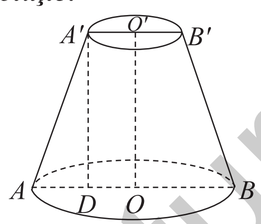
Într-un trunchi de con circular drept, aplicând teorema lui Pitagora şi ţinând seama de notaţiile făcute, obţinem:

- în ΔAED: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$.

Cum se aplică?

1. Un trunchi de con circular drept are $R = 7$ cm, $g = 13$ cm şi $i = 12$ cm. Calculaţi perimetrul secţiunii axiale.

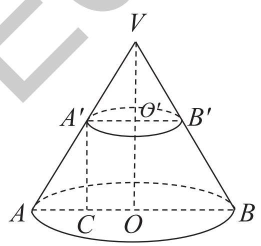
Soluţie:



În trunchiul de con circular drept din figura alăturată, trapezul isoscel $ABB'A'$ este o secţiune axială. Construim $A'D \perp AB$, $D \in AB$. În $\Delta A'DA$ cu $\measuredangle D = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, deci $13^2 = 12^2 + (7 - r)^2$ sau $(7 - r)^2 = 25$, de unde rezultă că $7 - r = 5$ şi obţinem $r = 2$ cm; $\mathscr{P}_a = 2(R + r + g) = 2(7 + 2 + 13)$ cm $= 44$ cm.

2. Un trunchi de con circular drept are $R = 5$ cm, $r = 2$ cm şi $g = 3\sqrt{5}$ cm. Calculaţi înălţimea conului circular drept din care provine trunchiul de con.

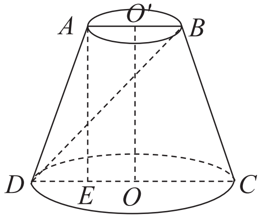
Soluţie:



În trunchiul de con circular drept din figura alăturată, trapezul isoscel $ABB'A'$ este o secţiune axială. Construim $A'C \perp AB$, $C \in AB$. În $\Delta AA'C$ cu $\measuredangle C = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obţinem $i = 6$ cm. Dacă notăm cu V vârful conului din care provine trunchiul de con şi aplicăm teorema conurilor asemenea, rezultă că: $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'A'}{OA}$, deci $\frac{2}{5} = \frac{h-6}{h}$, de unde rezultă că $2h = 5h - 30$ sau $3h = 30$ şi obţinem $h = 10$ cm.

3. Trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ şi $AB < CD$, este secţiunea axială a unui trunchi de con circular drept. Ştiind că semidreapta DB este bisectoarea unghiului ADC, $R = 11$ cm, $g = 10$ cm, calculaţi înălţimea trunchiului de con.

Soluţie:

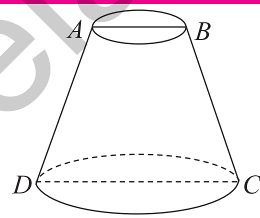


Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$, dar $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ADB$, deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ADB$, prin urmare $AB \equiv AD$ sau $2r = g$ şi obţinem $r = 5$ cm. Construim $AE \perp CD$, $E \in (CD)$. În ΔAED cu $\sphericalangle E = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, deci $10^2 = i^2 + 6^2$ şi după efectuarea calculelor obţinem $i = 8$ cm.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Completaţi spaţiul punctat cu răspunsul corect. Secţiunea axială a trunchiului de con circular drept reprezentat în figura alăturată este ....



2. Calculaţi perimetrul secţiunii axiale a trunchiului de con circular drept reprezentat în figura de la problema precedentă, ştiind că:

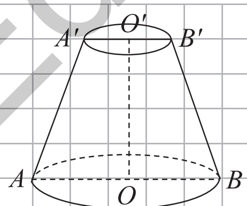
a) $R = 5$ cm, $r = 3$ cm şi $g = 7$ cm; b) $R = 6$ cm, $r = 3$ cm şi $g = 9$ cm.

b)

3. Calculaţi aria secţiunii axiale a unui trunchi de con circular drept, în următoarele cazuri:

a) $R = 7$ cm, $r = 4$ cm şi $i = 8$ cm; b) $R = 6$ cm, $r = 3$ cm şi $i = 7$ cm.

b)



Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

(*Capitolele: Intervale de numere reale. Inecuaţii în $\mathbb{R}$, Calcul algebric în $\mathbb{R}$, Elemente ale geometriei în spaţiu*)

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(7p) **1.** Numărul întreg –4 aparţine intervalului:
A. $(-4; 1)$; B. $[-3; 4)$; C. $[-4; 1]$; D. $(-4; 3)$.

(7p) **2.** Rezultatul calculului $(-9x^5) : (3x) + (2x^2)^2$ este egal cu:
A. $3x^3$; B. $-x^2$; C. $2x^5$; D. $-x^4$.

(7p) **3.** Dacă descompunem în factori suma algebrică $x^2 - 49$, obţinem:
A. $7(x^2 - 7)$; B. $(x - 7)(x + 7)$; C. $(x - 4)(x + 9)$; D. $x(x - 49)$.

(7p) **4.** Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Planele $(D'DE)$ şi $(F'FE)$ sunt:
A. identice; B. secante; C. paralele.

(7p) **5.** Perimetrul secţiunii axiale a unui cilindru circular drept cu $R = 3$ cm şi $G = 8$ cm este egal cu:
A. 28 cm; B. 18 cm; C. 24 cm; D. 32 cm.

(7p) **6.** Rezultatul calculului $3x(x + 2) - (x - 2)(3x + 1)$ este egal cu:
A. $x^2 - 4x$; B. $11x + 2$; C. $13x - 1$; D. $x^2 + 4x$.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(8p) **1.** Se consideră intervalele de numere reale $E = (-2; \sqrt{3})$ şi $F = [-\sqrt{3}; 2]$. Determinaţi intervalele $E \cup F$ şi $E \cap F$.

(8p) **2.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{1}{4} - \frac{7x}{10} \geq \frac{4x}{5}$.

(8p) **3.** Se consideră expresia $E(x) = 5(x + 1)^2 - (2x - 3)^2 + (1 - x)(x + 1) - 22x$, $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că expresia $E(x)$ nu depinde de x, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(8p) **4.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm şi $AA' = 4$ cm. Calculaţi aria patrulaterului $ABC'D'$.

5. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ cu muchia de 24 cm şi punctul E situat pe muchia AD, astfel încât $AD = 4AE$. Notăm cu F simetricul punctului E faţă de A, iar cu M şi N proiecţiile punctului F pe muchiile BD, respectiv CD. $AB \cap FM = \{Q\}$ şi $AC \cap FN = \{P\}$.

(8p) a) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele PQ şi CD.

(8p) b) Calculaţi perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Notă (pentru testele 1 – 3): Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

Testul 1

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Numărul de 10 ori mai mare decât 0,123 este egal cu:
a) 1230; b) 1,23; c) 12,3; d) 123,0.

(5p) **2.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 şi 60 este egal cu:
a) 24; b) 9; c) 6; d) 12.

(5p) **3.** Într-o mare situată la altitudinea de –21m a fost scufundată la adâncimea de 17 m o cameră de luat vederi. Altitudinea camerei de luat vederi este egală cu:
a) –5 m; b) –24 m; c) –38 m; d) –7 m.

(5p) **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine crescătoare este:
a) $4\sqrt{5}, 5\sqrt{3}, 6\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{5}, 6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$;
c) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$; d) $5\sqrt{3}, 6\sqrt{2}, 4\sqrt{5}$.

(5p) **5.** În tabelul alăturat sunt prezentate notele unui elev din clasa a VIII-a la Educaţie fizică. Media elevului la Educaţie fizică a fost:

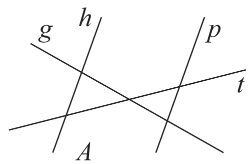
Nota	6	9	10
Numărul de note	1	3	1

a) 6; b) 7; c) 8; d) 9.

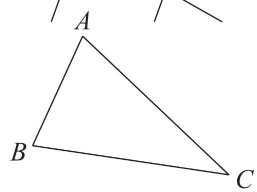
(5p) **6.** Radu afirmă că „suma a două numere naturale impare este un număr natural impar”. Afirmaţia lui Radu este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.

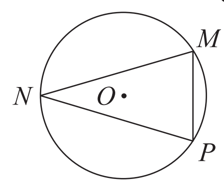
(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate dreptele *g*, *h*, *p* şi *t*. Dintre cele patru drepte, cele paralele sunt:
a) *g* şi *h*; b) *h* şi *p*;
c) *p* şi *t*; d) *t* şi *g*.



(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul *ABC*. Dacă $AB < BC < CA$, atunci:
a) $\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$; b) $\sphericalangle A < \sphericalangle B < \sphericalangle C$;
c) $\sphericalangle B < \sphericalangle C < \sphericalangle A$; d) $\sphericalangle C < \sphericalangle B < \sphericalangle A$.

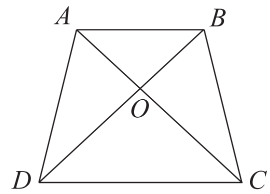


(5p) **3.** Pe cercul de centru *O* şi rază *R* din figura alăturată sunt reprezentate punctele *M*, *N* şi *P*. Dacă $R = 3\sqrt{7}$ cm şi măsura unghiului *MNP* este egală cu 30°, atunci lungimea coardei *MP* este de:
a) $7\sqrt{3}$ cm; b) 3 cm;
c) 7 cm; d) $3\sqrt{7}$ cm.



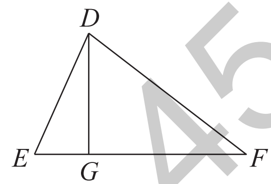
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathscr{P}_{AOD} = 23$ cm şi $\mathscr{P}_{BCD} = 41$ cm, atunci lungimea bazei mari CD este egală cu:

a) 10 cm; b) 18 cm;
c) 15 cm; d) 12 cm.



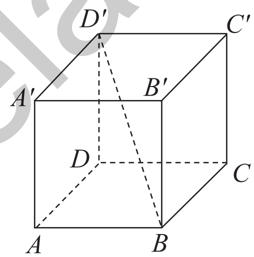
(5p) **5.** Triunghiul DEF dreptunghic în D din figura alăturată reprezintă traseul unui autobuz, iar punctele D, E, G şi F sunt staţiile în care acesta opreşte. Dacă $DG \perp EF$, $\mathrm{tg}(\sphericalangle E) = \sqrt{3}$ şi $DG = 6$ km, atunci distanţa dintre staţiile E şi F este egală cu:

a) $6\sqrt{3}$ km; b) $7\sqrt{3}$ km;
c) $8\sqrt{3}$ km; d) $9\sqrt{3}$ km.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub notat $ABCDA'B'C'D'$. Dacă muchia lui este de $5\sqrt{2}$ cm, atunci lungimea proiecţiei diagonalei BD' pe planul $(B'BC)$ este egală cu:

a) 15 cm; b) $10\sqrt{2}$ cm;
c) $12\sqrt{2}$ cm; d) 10 cm.



Subiectul al III-lea. Scrieţi rezolvările complete.

1. Se consideră intervalele de numere reale $A = (-4; 1]$ şi $B = (-3; 3)$.

(3p) a) Calculaţi suma numerelor întregi din intervalul $A \cup B$.

(2p) b) Determinaţi cardinalul mulţimii $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in A \cap B\}$.

2. Vârstele a trei fraţi sunt direct proporţionale cu numerele 6, 7 şi 9, iar diferenţa de vârstă dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre fraţi este de 6 ani.

(3p) a) Aflaţi vârsta fratelui mai mare şi vârsta fratelui mai mic.

(2p) b) Calculaţi diferenţa de vârstă dintre fratele mijlociu şi fratele mai mic.

3. Se consideră expresia $E(x) = (x-2)^2 - (x-1)^2 + (x-2)(x+2) + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

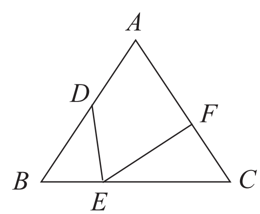
(2p) a) Arătaţi că $E(x) = x^2 + x - 1$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, $E(n)$ este număr întreg impar.

4. Triunghiul echilateral ABC din figura alăturată reprezintă schematic un zmeu din carton, pe care un elev a construit segmentele DE şi EF. Se ştie că $DB = 4$ cm, $BE = 2$ cm, $EC = 6$ cm şi $\Delta DBE \sim \Delta ECF$.

(2p) a) Calculaţi lungimea segmentului CF.

(3p) b) Determinaţi măsura unghiului DEF.



INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

Testul 1

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	A	C	C	C	A	D	B	C

Partea a II-a

1. $S = \{(3; -1)\}$. **2.** a) $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$; b) $x^{-1} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$; $m_a(x; x^{-1}) = \frac{7\sqrt{6}}{12}$. **3.** a) $\mathscr{P}_{ABC} = 24$ cm; b) $r = \frac{AB + AC - BC}{2} = 2$ cm; c) $\mathscr{A}_d = 4\pi$ cm^2.

Testul 2

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	B	B	D	C	C	B	A	B

Partea a II-a

1. $x = -\frac{5}{4}$. **2.** a) $A \times B = \{(-1; -2), (-1; 2), (3; -2), (3; 2)\}$; b) $\mathscr{A} = 16$ u^2. **3.** a) $AE = 6$ cm, $AF = 5$ cm; b) $\mathscr{A}_{ABCD} = 60$ cm^2; c) $\mathscr{A}_{AEF} = 7{,}5$ cm^2.

Testul 3

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	B	D	B	A	C	B	C	D

Partea a II-a

1. $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$. **2.** a) $y = \sqrt{6}$; b) $x = 6\sqrt{6}$; $m_g(x; y) = 6$. **3.** a) $\mathscr{A}_{ABCD} = 64$ cm^2; b) $BE = 6$ cm şi, aplicând teorema lui Pitagora în ΔBCE, obţinem $CE = 10$ cm, deci $\mathscr{P}_{EBC} = 24$ cm; c) Construim $DF \perp CE$. $\Delta EBC \sim \Delta CFD$ şi obţinem $DF = 6{,}4$ cm.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I – INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecţia 1. Mulţimi definite printr-o proprietate a elementelor

1. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; c) $C = \{0, 1, 2\}$; d) $D = \{2, 3, 4, 5\}$. **2.** a) $A = \{$g, e, o, m, t, r, i, a$\}$, card $A = 8$; b) $B = \{7, 0, 1, 2, 3, 4, 8\}$, card $B = 7$. **3.** a) $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, card $E = 5$; b) $F = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, card $F = 6$. **4.** a) $A = \left\{\frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$, card $A = 5$; b) $B = \left\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}\right\}$, card $B = 4$. **5.** $E = \{$t, e, r, a, d, u$\}$, $F = \{$c, i, l, n, d, r, u$\}$; a) $E \cup F = \{$t, e, r, a, d, u, c, i, l, n$\}$; b) $E \cap F = \{$r, d, u$\}$; c) $E \setminus F = \{$t, e, a$\}$; d) $F \setminus E = \{$c, i, l, n$\}$. **6.** a) $C \cup D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $C \cap D = \{1, 2\}$; $C \setminus D = \{3, 4, 5\}$; $D \setminus C = \{-2, -1, 0\}$; b) $C \cup D =$

$\in \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$. **21.** a) $x = 3$; b) $x = -6$; c) $x = 4$; d) $x = -4$. **22.** a) $x = 3$; b) $x = -6$; c) $x = -4$; d) $x = -3$. **23.** a) $x \in (-3; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 5)$; c) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; d) $x \in \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$. **24.** i) a) $x \in (-2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; b) $x \in [-\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; c) $x \in (-\sqrt{5}; 3\sqrt{5})$; d) $x \in [\sqrt{6}; 3\sqrt{6}]$; e) $x \in (2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; f) $x \in [\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; ii) a) $x \in \left(-\frac{1}{12}; \frac{19}{12}\right)$; b) $x \in \left(-\frac{23}{12}; \frac{41}{12}\right)$; c) $x \in \left[-\frac{14}{9}; \frac{10}{9}\right]$; d) $x \in (-8\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$; e) $x \in [3\sqrt{3}; 9\sqrt{3}]$; f) $x \in (8\sqrt{7}; 16\sqrt{7})$. **25.** a) $x = -3$; b) $x = -2$. **26.** $x \in (-\infty; 4+2\sqrt{5})$; $4+2\sqrt{5} > 4+2\sqrt{4} = 8$, deci $x = 8$. **27.** a) $x \in (2; 4)$; b) $x \in [-3; -1]$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $x = (-\infty; 1)$; b) $x \in (-4; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; 2\sqrt{5}]$. **2.** a) $x = (-\infty; 12)$; b) $x \in (-\infty; -5]$. **3.** $x = -2$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. a) $E \cup F = [-5; \sqrt{5})$; b) $E \cap F = (-2\sqrt{6}; 2)$; c) $E \setminus F = [-5; -2\sqrt{6}] \cup [2; \sqrt{5})$; d) $F \setminus E = \varnothing$. **6.** $A = [-2; 3]$, deci card$(A \cap B) = 3$. **Testul 2. 5.** Observăm că $c > 4$ şi u$(c^3) = c$, prin urmare $c \in \{5, 6, 9\}$; $A = \{125, 216, 729\}$; $n = 2^{\text{card } A} = 8$ submulţimi. **6.** $E = [-2; +\infty)$ şi $F = (-\infty, 3)$; $E \cup F = \mathbb{R}$; $E \cap F = [-2; 3)$; $E \setminus F = [3; +\infty)$; $F \setminus E = (-\infty; -2)$. **Testul 3. 5.** $x \in \left[-\frac{9}{5}; +\infty\right)$, deci cel mai mic număr întreg care verifică inecuaţia este -1. **6.** $A = (-\sqrt{3}; +\infty)$ şi $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, deci card$(A \cap B) = 3$.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. **2.** F. **3.** A. **II. 1.** $[-3; 0]$. **2.** 0. **3.** $(-\infty; -1]$. **III. 1.** C. -5. **2.** A. 6. **3.** D. $(-\infty; -12]$. **IV.** $E \cup F = \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$; $E \cap F = (-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$; $E \setminus F = \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$; $F \setminus E = \left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right]$. **V.** a) $A = [32; 98]$; b) $b = \frac{9a-3}{a+9}$, de unde rezultă că $a \in \{3, 5\}$, prin urmare $B = \{32, 53\}$, deci $B \subset A$.

Capitolul II – Calcul algebric în $\mathbb{R}$

Lecţia 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

1. a) Coeficientul este 38, iar partea literală este x^5; b) Coeficientul este $-\frac{7}{8}$, iar partea literală este y^3; c), d), e), f), g), h) Analog. **2.** a) $3x^2 - 8x + 29$; b) $-4x^2 + 35x - 7$; c) $2y^4 - \sqrt{2}y^3 + 4y - 21$; d) $-9y^5 + \sqrt{5}y^3 - y^2 - 16$. **3.** a) $-3x^5$; b) $11x^2$; c) $4z^3$; d) $-21z$; e) $9y^4$; f) $-\frac{1}{4}y$; g) $\sqrt{2}t$; h) $\frac{7}{3}t^5$. **4.** a) $7x$; b) $5x$; c) $3x$; d) $11x^2$; e) $11x^2$; f) $2x^2$; g) $-8x^2$; h) $28x^2$; i) $6x^3$. **5.** a) $9a$; b) $5a$; c) $-23a^2$; d) $2a^2$; e) $3a^3$; f) $4a^3$. **6.** a) $2x + 1$; b) $-6x - 4$; c) $-9x + 7$; d) $10x - 9$; e) $-6x + 2$; f) $-2x + 6$; g) $-4x^2 - 4x$; h) $-14x^2 - 3x$; i) $16x^2 + 6x$. **7.** a) $5x^2 - 6x$; b) $4x^2 - x$; c) $25x^3 - 8x$; d) $-21x^3 + 6x$; e) $-12x^4 + x^2$; f) $-12x^4 + 4x^2$. **8.** a) $-3y^3 - 10y$; b) $-8y^4 - 3y$; c) $3y^5 - 6y$; d) $-8y^3 + 4y$; e) $-4y^4 - 3y^2$; f) $-23y^5 - 3y^3$. **9.** a) $5x^2 + 2x - 6$; b) $-4x^2 - 2x - 5$; c) $-3x^2 + 5x + 13$; d) $-11x^2 - 6x + 2$; e) $-9x^2 -$

c) $\frac{x+2}{7x^3}$. **18.** a) $\frac{3x-2}{4x^2-x^3}$; b) $\frac{2x^2-7x}{3}$; c) $\frac{3-5x}{3x^4+x^3}$. **19.** a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x-1}{x+2}$; c) $\frac{x-3}{x-5}$; d) $\frac{x+3}{x+5}$. **20.** a) $\frac{x-3}{4x}$; b) $\frac{3x^2}{x+1}$; c) $\frac{x-2}{2x^3}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $\frac{2x-3}{2x^2+x}$; b) $\frac{2}{x^2}$. **2.** a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x^2-x}{x+3}$. **3.** a) $\frac{x+1}{5x-x^2}$; b) $\frac{x+3}{4x}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $\frac{21x^2+3x}{6x^4-6x^2}$, $\frac{x^2-2x+1}{6x^4-6x^2}$. **6.** $\frac{x+1}{x}$. **Testul 2. 5.** $\frac{4x^3+8x^2}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$, $\frac{x^2-9}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$. **6.** $\frac{4x+5}{6x^2-3x}$. **Testul 3. 5.** $\frac{2x^2}{x-3}$. **6.** $\frac{3x^3-12x^2+12x}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$, $\frac{x^3-2x^2-x+2}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$, $\frac{4x^2+4x-8}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** A. **3.** F. **II. 1.** $\frac{2x}{3}$. **2.** $6x^2$. **3.** $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$. **III. 1.** B. $\mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$. **2.** C. $\frac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2+x}$. **3.** D. $\frac{x-1}{4x^2}$. **IV.** $\frac{3x^2-12x+12}{3x^2(x-2)(x-1)(x+2)}$, $\frac{x^3-x}{3x^2(x-2)(x-1)(x+2)}$. **V.** a) $E(x) = \frac{3}{x+2}$; b) $F(x) = \frac{x-3}{x(x+1)}$; $E(x) = \frac{3x^2+3x}{x(x+1)(x+2)}$, $F(x) = \frac{x^2-x-6}{x(x+1)(x+2)}$.

GEOMETRIE

Capitolul I – Elemente ale geometriei în spaţiu

Lecţia 1. Puncte, drepte, plane: convenţii de notare, reprezentări, determinarea dreptei

2. a) A; b) A. **3.** a) A; b) A. **4.** a) F; b) A. **6.** 4 drepte. **7.** 6 drepte. **8.** Observăm că $A \in BC$ şi $D \in BC$, deci A, B, C, D sunt coliniare. **9.** 6 drepte. **10.** MN, NP, PM, MF, PE, EF. **11.** 8 drepte. **12.** 10 drepte. **13.** a) O dreaptă, când cele 5 puncte sunt coliniare; b) 10 drepte, când oricare 3 dintre cele 5 puncte sunt necoliniare. **14.** Se arată că $EC \parallel BD$ şi $FC \parallel BD$, deci E, C şi F sunt coliniare. **15.** 8 drepte. **16.** Se arată că $\sphericalangle EAF = 180°$, deci E, A şi F sunt coliniare; 11 drepte. **17.** $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. Observăm că $Q \notin MN$, deci M, N, Q sunt necoliniare. **2.** a) O dreaptă, când cele 4 puncte sunt coliniare; b) 6 drepte, când oricare 3 dintre cele 4 puncte sunt necoliniare. **3.** Se arată că $EC \parallel BD$ şi $FC \parallel BD$, deci E, C şi F sunt coliniare.

Lecţia 2. Determinarea planului. Relaţii între puncte, drepte şi plane

1. a) Planul determinat de punctele D, E şi F; b) Planul determinat de dreptele g şi h; d) Planul determinat de dreapta a şi punctul M. **2.** a) (MNP); b) $(g; T)$; c) $(d; g)$; d) $(c; d)$. **3.** F. **4.** B. $T \notin g$. **5.** a) A; b) F; c) A; d) A. **6.** $a \cap b = \{D\}$; există punctele $E \in a$ şi $F \in b$, diferite de D, prin urmare planul (DEF) include dreptele a şi b, deci acestea determină planul (DEF). **7.** $a \parallel b$; există punctele $A, B \in a$ şi $C, D \in b$, astfel încât $AC \cap BD = \{E\}$, prin urmare planul $(AC; BD)$ include dreptele a şi b, deci acestea determină planul $(AC; BD)$. **8.** 4 plane. **9.** 7 plane. **10.** $AC \cap BD = \{O\}$, deci $BO \equiv DO$. Punctul G este centru de greutate în ΔTAC, prin urmare $TG \cap BD = \{O\}$, aşadar punctele T, G, B şi D sunt coplanare. **11.** $CE \parallel BD$ şi $CF \parallel BD$, deci punctele E, C şi F sunt coliniare, prin urmare punctele T, E, C şi F sunt coplanare. **12.** a) Un plan, când punctele M, N, P, Q şi T sunt coliniare; b) 11 plane, când oricare 3 dintre punctele M, N, P, Q şi T sunt necoliniare. **13.** $AN \cap BP \cap CM = \{G\}$, deci cele 3 plane au în comun dreapta DG. **14.** Dacă notăm cu O centrul hexagonului, atunci $AD \cap BE \cap CF = \{O\}$, deci cele 3 plane au în comun dreapta GO. **15.** $AC \cap BD = \{O\}$; $\Delta AMO \sim \Delta CNO$, de unde rezultă că $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle CON$, deci punctele M, O şi N sunt coliniare, prin urmare planele (PAC), (PMN) şi (PBD) au în comun dreapta PO. **16.** $\frac{(n-1)n}{2} = 10^p$ sau $(n-1)n = 2^{p+1} \cdot 5^p$, egalitate care este adevărată pentru $p = 1$, prin urmare $n = 5$. **17.** $AC \cap BD = \{T\}$; $AD \perp TB$ şi $BC \perp TA$, deci punctul E este ortocentrul ΔTAB, prin urmare $TE \perp AB$, aşadar punctele T, E şi F sunt coliniare, deci dreptele AC şi BD rămân concurente după îndoirea semidiscului, iar punctele A, B, C şi D rămân coplanare.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. (DEF), (NED), (NFD), (NEF) şi (NEM). **2.** a) Un plan, când punctele A, B, C şi D sunt coliniare; b) 7 plane, când oricare 3 dintre punctele A, B, C şi D sunt necoliniare. **3.** $PE \parallel NQ$ şi $PF \parallel NQ$, deci punctele E, P şi F sunt coliniare, prin urmare punctele A, E, P şi F sunt coplanare.

Lecţia 3. Tetraedrul şi piramida

1. C. ΔDEF. **2.** a) F; b) A; c) A; d) A. **3.** B. $MNPQ$ este pătrat. **4.** Muchiile bazei: MN, NP, PQ, QM. Muchiile laterale: VM, VN, VP, VQ. Feţele laterale: ΔVMN, ΔVNP, ΔVPQ, ΔVQM. **5.** a) A; b) A. **6.** A. **7.** a) $\mathcal{P}_{ABC} = 6$ cm; b) $\mathcal{A}_{BCD} = \sqrt{3}$ cm^2. **8.** a) $\mathcal{P}_{ABC} = 18$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABC} = 9\sqrt{3}$ cm^2; c) $\mathcal{P}_{VAB} = 16$ cm; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 12$ cm^2. **9.** a) $\mathcal{P}_{ABCD} = 40$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 100$ cm^2; c) $\mathcal{P}_{VAB} = 36$ cm; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 60$ cm^2. **10.** a) $AB = 16$ cm; b) $VA = 10$ cm; c) $\mathcal{A}_{ABC} = 64\sqrt{3}$ cm^2; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 48$ cm^2. **11.** a) $AB = 18$ cm; b) $BD = 18\sqrt{2}$ cm; c) $VA = 15$ cm; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 108$ cm^2. **12.** a) $AB = 4$ cm; b) $\mathcal{P}_{ABC} = 12$ cm; c) $VA = 2\sqrt{5}$ cm; d) $\mathcal{P}_{VAB} = 4(1+\sqrt{5})$ cm. **13.** a) $AB = 4\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{P}_{ABCD} = 16\sqrt{2}$ cm; c) $\mathcal{A}_{ABCD} = 32$ cm^2; d) $\mathcal{P}_{VAB} = 12\sqrt{2}$ cm. **14.** a) $\mathcal{P}_d = 12$ cm; b) $\mathcal{P}_b = 8\sqrt{2}$ cm; c) $\mathcal{A}_b = 8$ cm^2; d) $\mathcal{P}_f = 2(4+\sqrt{2})$ cm; e) $\mathcal{A}_f = 2\sqrt{7}$ cm^2. **15.** a) $\sphericalangle BVC = 60°$; b) $\sphericalangle VAC = 60°$. **16.** Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$. Secţionând după muchiile AB, AC şi AD, observăm că $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC + \sphericalangle ABC = 180°$, deci triunghiul este echilateral. **17.** $MN \parallel VB \parallel PQ$, deci M, N, P şi Q sunt coplanare; $MNPQ$ este paralelogram şi $\mathcal{P}_{MNPQ} = 13$ cm. **18.** a) Desfăşurând în plan suprafaţa laterală a piramidei $VABC$, observăm că lungimea celui mai scurt drum este egală cu lungimea segmentului MN. Din ΔMVN rezultă că $MN = 4$ dm; b) $VMBN$ este pătrat, deci $VT \equiv BT$. **19.** Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V. $AC \cap BD = \{O\}$. $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{AVC}$, deci $DO \equiv VO$, prin urmare $\Delta AOD \equiv \Delta AOV$, adică $AD \equiv AV$. **20.** Desfăşurând în plan suprafaţa tetraedrului $ABCD$, observăm că $\sphericalangle BAM = 90°$, deci lungimea celui mai scurt drum este $BA = 3$ m. **21.** a) $VM = MN = VN = \frac{l}{2}$; b) $\mathcal{A}_{VAB} + \mathcal{A}_{VBC} + \mathcal{A}_{VCA} = 3\frac{m^2}{2}$; $l = m\sqrt{2}$,

Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

Testul 1. I. 1. C. $[-4; 1]$. **2.** D. $-x^4$. **3.** B. $(x-7)(x+7)$. **4.** B. secante. **5.** A. 28 cm. **6.** B. $11x + 2$. **II. 1.** $E \cup F = (-2; 2]$, $E \cap F = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$. **2.** $x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right]$. **3.** $E(x) = 5(x^2 + 2x + 1) - (4x^2 - 12x + 9) + 1 - x^2 - 22x = 5x^2 + 10x + 5 - 4x^2 + 12x - 9 + 1 - x^2 - 22x = -3$. **4.** $\mathcal{A}_{ABC'D'} = AB \cdot BC' = 10$ cm^2. **5.** a) $AF = AP = AQ = 6$ cm, deci $PQ \parallel BC$, prin urmare $\sphericalangle(PQ, CD) = \sphericalangle BCD = 60°$; b) $PQ \parallel (BCD)$, deci $PQ \parallel MN$, prin urmare $MNPQ$ este trapez isoscel; $\mathcal{P}_{MNPQ} = 3(7+6\sqrt{3})$ cm.

Testul 2. I. 1. D. -7. **2.** B. $-x^3$. **3.** C. $3x^2(2x-3)$. **4.** C. necoplanare. **5.** A. 19 cm. **6.** D. $-x^2 + 6$. **II. 1.** $E \cup F = \left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right]$, $E \cap F = \left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$. **2.** $x \in [-\sqrt{10}; +\infty)$. **3.** $E(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1) + x(4 - x^2) - 7x = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 + 4x - x^3 - 7x = -6x + 2$; $E(n) = 2(1 - 3n) \,\vdots\, 2$. **4.** $h = 4$ cm. **5.** a) $\sphericalangle(B'C, O'D) = \sphericalangle A'DO' = 30°$; b) Construim $BE \perp O'D$. Din egalitatea $\mathcal{A}_{B'BDO'} = \mathcal{A}_{B'BO'} + \mathcal{A}_{O'BD}$ rezultă că $BE = 4\sqrt{3}$ cm.

Testul 3. I. 1. A. 0. **2.** D. $-3x$. **3.** B. $x^2 + 2x + 1$. **4.** C. $(C'CD)$. **5.** D. 15 cm. **6.** B. $2x - 3$. **II. 1.** $E \cup F = [-4; 5]$, $E \cap F = (-2; 5)$. **2.** $x \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right]$; $x = -3$. **3.** Notăm $x^2 - x = a$; $E(x) = a(a-5) + 6 = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3) = (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 3) = (x-2)(x+1)(x^2 - x - 3)$. $E(a) = (a-2)(a+1)(a^2 - a - 3)$. Observăm că: pentru $a = 3k + 2$, $a - 2 \,\vdots\, 3$, pentru $a = 3k + 1$, $a^2 - a - 3 \,\vdots\, 3$, pentru $a = 3k$, $a^2 - a - 3 \,\vdots\, 3$, prin urmare $E(a) \,\vdots\, 3$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$. **4.** $R = 6$ cm, $G = 9$ cm, $h = 3\sqrt{5}$ cm. **5.** a) $AC \cap BD = \{O\}$; $\sphericalangle(AB, VM) = \sphericalangle VMO = 60°$; b) $l = a_p = 8$ cm, $h = 4\sqrt{3}$ cm, $\mathcal{A}_d = 16\sqrt{6}$ cm^2.

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Testul 1

Subiectul I

1. b) 1,23 *(5p)*. **2.** d) 12 *(5p)*. **3.** c) –38 m *(5p)*. **4.** c) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$ *(5p)*. **5.** d) 9 *(5p)*. **6.** b) falsă *(5p)*.

Subiectul al II-lea

1. b) h și p *(5p)*. **2.** a) $\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$ *(5p)*. **3.** d) $3\sqrt{7}$ cm *(5p)*. **4.** b) 18 cm *(5p)*. **5.** c) $8\sqrt{3}$ cm *(5p)*. **6.** d) 10 cm *(5p)*.

Subiectul al III-lea

1. a) –3 *(3p)*; b) card $E = 4$ *(2p)*. **2.** a) $\frac{a}{6} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = k$, $a = 6k$, $b = 7k$, $c = 9k$, $c - a = 6 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$, deci $c = 18$ ani și $a = 12$ ani *(3p)*; b) $b = 14$ ani; $b - a = 2$ ani *(2p)*. **3.** a) $E(x) = x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 + 3x = x^2 + x - 1$ *(2p)*; b) $E(n) = n^2 + n - 1$; deoarece n^2 și n au aceeași paritate, rezultă că $n^2 + n$ este par, deci $n^2 + n - 1$ este număr impar *(3p)*. **4.** a) $\frac{DB}{EC} = \frac{BE}{CF}$, de unde obținem $CF = 3$ cm *(2p)*; b) $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CEF$; $\sphericalangle BED + \sphericalangle CEF = 120°$, deci $\sphericalangle DEF = 60°$ *(3p)*. **5.** a) $BD^2 = AB^2 + AD^2$, de unde obținem $BD = 25$ cm; d$(A, BD) = AE = \frac{AB \cdot AD}{BD} = 12$ cm *(2p)*; b) $AE = CF = 12$ cm și $AE \parallel CF$, deci $AECF$ este paralelogram; $EF = BD - DE - BF = 7$ cm;